

---

---

# THEORIE DE DECOMPOSITION DES PHENOMENES CYCLIQUES

---

---

Chapitre 2 sur 6 :

**Reconstitution de  
fonctions connues,  
lien avec les polynômes**

---

---

par WEIDMANN Sébastien

(travaux débutés en Octobre 2006)

# Modifications éventuelles et droits d'utilisation

Je me réserve le droit d'apporter des modifications ou des corrections à tout instant si j'estime que cela est nécessaire (notamment pour corriger des erreurs éventuelles ou compléter des réflexions qui pourraient être insuffisantes).

Certains passages ne sont pas complets car ils sont secondaires (non essentiels à la compréhension globale de cette théorie), mais ils sont en cours de réalisation. Cela est précisé lorsque c'est le cas.

Le **Chapitre 4** est un chapitre important mais il ne sera publié intégralement que lorsque j'estimerai que mes travaux le concernant auront atteint une maturité satisfaisante.

Il n'y a pas de contrainte de temps concernant ces travaux en cours de réalisation.

Travaux en 6 Chapitres, débutés en Octobre 2007. Tous droits réservés à **WEIDMANN Sébastien**, né à Chaumont (52 000), FRANCE.

Toute personne désirant utiliser partiellement ou complètement cette théorie peut le faire à la seule condition de le mentionner et d'associer à cette mention mes nom et prénom (aux parties ou formules utilisées, par exemple). Ceci offre quelques souplesse et liberté d'utilisation.

La redistribution de ces fichiers est également autorisée à condition de ne pas en modifier le contenu. **Aucune modification ne peut être faite sans mon accord.**

Par conséquent, pour d'éventuelles suggestions, merci de me contacter par l'intermédiaire du site **FUTURA-SCIENCES** (vous devez être inscrit comme membre, l'inscription est relativement simple) :

*(ne vous attendez pas à une réponse systématique de ma part)*

[Cliquez ici pour m'envoyer un mail \(message privé, pseudo : \*\*WizartS\*\*\)](#)

## Chapitre 2 :

# RECONSTITUTION DE FONCTION CONNUES, Lien avec les Polynômes

Modifications éventuelles et droits d'utilisation / mail . . . . .	2
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Remarques sur la formules <math>\mathfrak{I}(M)</math></b>	<b>7</b>
1.1 Rappels des caractéristiques de $\mathfrak{I}(M)$ . . . . .	8
1.2 Etude de polynômes “simples” . . . . .	9
1.3 Généralisation avec les polynômes . . . . .	19
1.4 Fonctions intéressantes . . . . .	21
<b>2 Reconstitution par “quantification”</b>	<b>25</b>



# Introduction

Il est important de comprendre ce chapitre pour comprendre le chapitre suivant (concernant la répartition exacte des nombres premiers).

(ATTENTION, dans ce chapitre, les crochets ont la même fonction que de simples parenthèses, ils ne signifient donc ni “valeur absolue” ni “partie entière”)



# 1

## Remarques sur la formules $\mathfrak{J}(M)$

- Ces travaux étant complémentaires à ceux du **Chapitre 1**, nous y ferons références plusieurs fois en faisant appel aux formules étudiées et nommées dans ce premier chapitre. En l'occurrence, dans ce second chapitre, nous allons faire référence à la formule  $\mathfrak{J}(M)$  décrite dans le chapitre précédent. Rappelons notamment brièvement que pour  $M \in \mathbb{N}$ ,  $M \geq 2$  :

$$S(M) = \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} \cdot \prod_{v=1}^{v=3} (M - v) \right) \cdot \frac{\sin^2 \left( (M - 1)! \cdot \frac{\pi}{M} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)}$$

- Et que pour  $M \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(M) &= s(2.M + 2) \\ &= s[P_n.(d.M + 1)] \quad \text{avec } d \in \mathbb{N} \text{ et } P_n \in \mathbb{P}. \\ &= s(M + 2).s(M + 3) \end{aligned}$$

$\mathfrak{J}(M^{2a})$  est définie pour tout  $M \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 1$ .

- De manière plus restreinte, la formule  $\mathfrak{J}(B)$  permet l'inversion des valeurs d'une variable "binaire"  $B$ . Cela signifie que pour  $B$  ne pouvant prendre que les valeurs binaires 0 ou 1, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(B) &= 1 & \text{si } B &= 0 \\ \mathfrak{J}(B) &= 0 & \text{si } B &= 1 \end{aligned}$$

et donc  $\mathfrak{J}(B) = 1 - B$

## 1.1 Rappels des caractéristiques de $\mathfrak{I}(M)$

Rappelons que la formule d'Impulsion Première  $\mathfrak{I}$  d'un polynôme de variable  $M \in \mathbb{N}$  telle que :

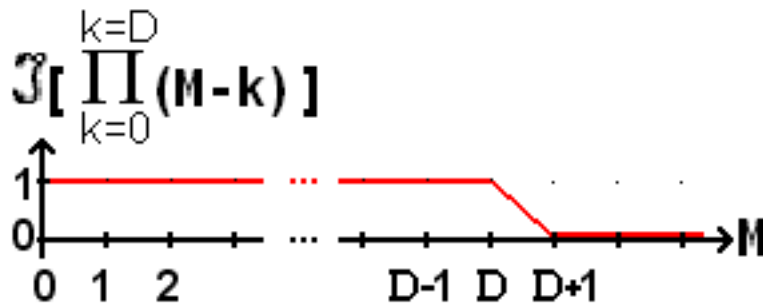
$$\mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] \quad \text{avec } D \in \mathbb{N}$$

a les caractéristiques suivantes :

$$\mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] = 1 \quad \text{pour } 0 \leq M \leq D$$

$$\mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] = 0 \quad \text{pour } M > D$$

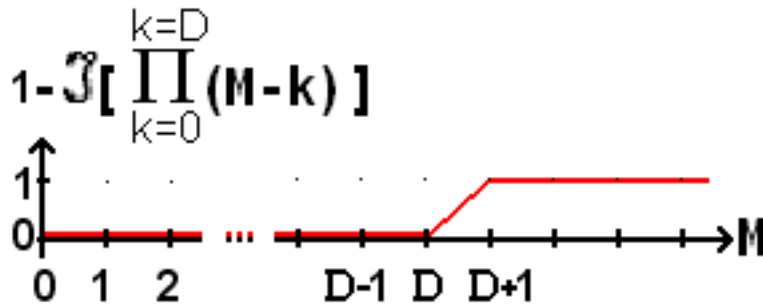
et la représentation graphique suivante :



La formule “complémentaire” correspondante est équivalente à :

$$1 - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] \quad \text{avec } D \in \mathbb{N}$$

et dont la représentation graphique est celle-ci :





## 1.2 Etude de polynômes “simples”

Soit un polynôme entier “positif”  $P(M)$  de variable  $M$ . Nous appellerons un polynôme entier de variable  $M \in \mathbb{N}$ , un polynôme ne donnant que des valeurs entières pour tout  $M \in \mathbb{N}$ , et nous appellerons un polynôme positif de variable  $M \in \mathbb{N}$  un polynôme ne donnant que des valeurs positives pour tout  $M \in \mathbb{N}$ . Un polynôme entier positif  $P(M)$  de variable  $M \in \mathbb{N}$  est donc un polynôme ne donnant que des valeurs entières positives pour tout  $M \in \mathbb{N}$ .

Remarque :

Pour prendre en compte le cas de tout polynôme, nous pourrions simplement élevé au carré tout polynôme afin de le rendre “positif”, au cas où il ne le serait pas déjà.

La formule d’Impulsion Première d’un nombre n’étant définie que pour un nombre entier positif, il en est de même pour la formule d’Impulsion Première d’un polynôme : elle est définie seulement pour les polynômes entier  $P(M)$  positif, nous savons que :

la formule d’Impulsion Première d’un polynôme positif de variable  $M$  vaut 1 lorsque le polynôme s’annule et vaut 0 sinon. Nous pouvons donc noter :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[P(M)] &= 1 && \text{si } P(M) = 0 \\ \mathfrak{I}[P(M)] &= 0 && \text{si } P(M) > 0 \end{aligned}$$

Ce qui peut encore être noté ainsi pour les valeurs de  $M$  rendant le polynôme  $P(M)$  nul :

$$P(M) = 1 - \mathfrak{I}[P(M)] = 0$$

Partant de ce principe, il va devenir possible d’établir des correspondances entre plusieurs formules.

- Etudions le polynôme entier positif  $P(M) = (M - D)^{2a}$  avec  $D \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{N}, a \geq 1$ . Remarquons que comme ce polynôme est toujours positif pour  $M \in \mathbb{Z}$ , la formule d'Impulsion Première de ce polynôme est aussi définie pour tout  $M \in \mathbb{Z}$ . Notons la ainsi :

$$\mathfrak{I}[P(M)] = \mathfrak{I}[(M - D)^{2a}]$$

Ce polynôme s'annule seulement si  $M = D$ . Nous avons donc :

$$\mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] = 1 \quad \text{si } M = D$$

$$\mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] = 0 \quad \text{sinon.}$$

Remarquons que ce résultat aurait encore pu être atteint d'une autre manière puisque, d'après les rappels que nous venons de faire en sous-partie "**1.1 Rappels des caractéristiques de  $\mathfrak{I}(M)$** " (page 8), nous pouvons déduire de la soustraction des formules entre les accolades :

$$\left\{ 1 - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D-1} (M - k) \right] \right\} - \left\{ 1 - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] \right\} = 1 \quad \text{si } M = D$$

$$\left\{ 1 - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D-1} (M - k) \right] \right\} - \left\{ 1 - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] \right\} = 0 \quad \text{sinon}$$

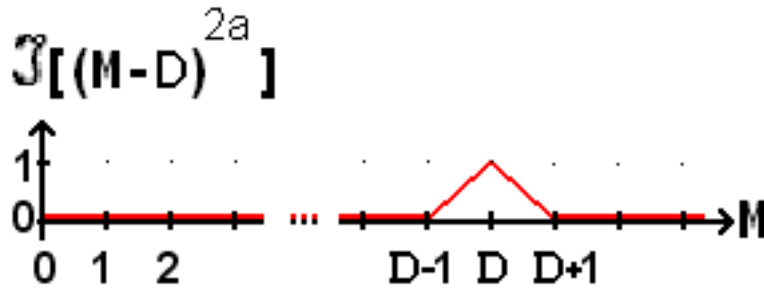
Or,

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D-1} (M - k) \right] \right\} - \left\{ 1 - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] \right\} \\ &= \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D-1} (M - k) \right] \end{aligned}$$

Et donc

$$\mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] = \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D-1} (M - k) \right]$$

Graphiquement, cela se représente ainsi :



- Par ce procédé, nous pouvons reconstituer énormément de formules ou de fonctions connues de différentes manières (par exemple : en faisant la somme de ce type de formule point par point). notamment, d'après cette dernière formule, et pour  $M \in \mathbb{N}$ , nous pouvons reconstituer une droite :

$$\sum_{D=0}^{D \rightarrow +\infty} \mathfrak{J}[(M - D)^{2a}] = 1$$

Mais il existe une infinité de manières de reconstituer cette droite avec d'autres polynômes entiers positifs  $P(M)$  qui possèdent plus d'une solution pour  $P(M) = 0$ , la seule condition à respecter étant que ces polynômes n'aient pas de solutions communes entre eux et qu'elles soient toutes complémentaires sur l'ensemble des nombres entiers (c'est-à-dire que chaque nombre entier est solution seulement une fois d'un polynôme, et cette règle est à appliquer à tous les entiers). Ainsi, nous pouvons déduire facilement encore un de ces cas :

$$\mathfrak{J} \left[ \prod_{D=0}^{D \rightarrow +\infty} (M - D)^{2a} \right] = 1$$

Et donc

$$\sum_{D=0}^{D \rightarrow +\infty} \mathfrak{J}[(M - D)^{2a}] = \mathfrak{J} \left[ \prod_{D=0}^{D \rightarrow +\infty} (M - D)^{2a} \right]$$

- Nous pouvons même reconstituer la formule complémentaire à  $\mathfrak{I}(M)$ , qui est partout équivalente à la droite précédente sauf pour  $M = 0$  :

$$\sum_{D=1}^{D \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] = 1 - \mathfrak{I}(M)$$

Remarque :

Cette égalité n'est pas pertinente, mais elle permet de donner  $\mathfrak{I}(M)$  par "auto-référence" (et en restant cohérente).

- Nous pouvons également reconstituer la formule  $s(M)$  (vue dans le **Chapitre 1**) à l'aide d'un produit ou d'une somme se faisant sur l'ensemble des nombres premiers :

$$s(M) = \mathfrak{I} \left[ \prod_{P_n} (M - P_n)^{2a} \right] \quad \text{avec } P_n \in \mathbb{P}$$

ou encore :

$$s(M) = \sum_{P_n} \mathfrak{I}[(M - P_n)^{2a}]$$

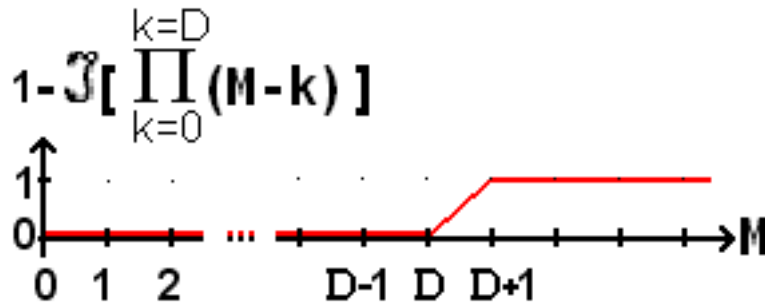
Ici aussi, nous pourrions énumérer une infinité de solutions puisqu'il existe une infinité de nombres premiers, donc une infinité de solutions possibles pour que les polynômes entiers positifs s'annulent.

- Nous pouvons encore reconstituer la formule de comptage  $C(M)$  (vue dans le **Chapitre 1**), puisque :

$$C_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{M=N_1}^{M=N_2} s(M)$$

Pour  $N_1 = 2$  et  $N_2 = N$ , nous aurons le nombre de nombres premiers compris sur l'intervalle  $[0; N]$ .

Etant donné (et pour  $D \in \mathbb{N}$ ) :



Et pour  $P_n = (D + 1)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} C_{N_1}^{N_2}(M) &= \sum_{M=2}^{M=N} s(M) \\ &= \sum_{P_n} \left\{ 1 - \Im \left[ \prod_{k=0}^{k=(P_n-1)} (N - k) \right] \right\} \\ &= \sum_{D=1}^{D \rightarrow +\infty} \left( s(D+1) \cdot \left\{ 1 - \Im \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (N - k) \right] \right\} \right) \end{aligned}$$

- Pour reconstituer d'autres formules, nous pouvons autoriser des solutions communes à ces polynômes positifs, dans la mesure où ces autres formules le permettent (notamment lorsque les valeurs de ces formules sont supérieures à 1, en correspondance avec la variable  $N$ ).

Notamment, nous pouvons également reconstituer la formule  $RM(N)$  vue dans le **Chapitre 1**, pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  (en étalant la somme sur plusieurs lignes) :

$$\begin{aligned}
RM(N) &= \mathfrak{I} \left[ \prod_{D=M}^{D \rightarrow +\infty} (N - D)^{2a} \right] \\
&+ \mathfrak{I} \left[ \prod_{D=M^2}^{D \rightarrow +\infty} (N - D)^{2a} \right] \\
&+ \mathfrak{I} \left[ \prod_{D=M^3}^{D \rightarrow +\infty} (N - D)^{2a} \right] \\
&+ \mathfrak{I} \left[ \prod_{D=M^4}^{D \rightarrow +\infty} (N - D)^{2a} \right] \\
&+ \dots \\
&+ \mathfrak{I} \left[ \prod_{D=M^m}^{D \rightarrow +\infty} (N - D)^{2a} \right]
\end{aligned}$$

Donc

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=m} \mathfrak{I} \left[ \prod_{D=M^b}^{D \rightarrow +\infty} (N - D)^{2a} \right]$$

Comme précédemment, cette manière en est une parmi l'infinité des autres manières possibles d'exprimer cette formule  $RM(N)$ . D'après l'exemple de l'égalité :

$$\sum_{D=0}^{D \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}[(N - D)^{2a}] = \mathfrak{I} \left[ \prod_{D=0}^{D \rightarrow +\infty} (N - D)^{2a} \right]$$

Nous trouverons aussi :

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=m} \sum_{D=M^b}^{D \rightarrow +\infty} \mathfrak{I}[(N-D)^{2a}]$$

Evidemment, d'autres polynômes que ceux-ci peuvent être utilisés.

- D'autres formules ou fonctions que les polynômes peuvent aussi être utilisées pourvu que celles-ci ne donnent pour résultat que des valeurs entières positives, puisque l'Impulsion Première de celles-ci n'est définie que pour leurs valeurs entières positives. Par exemple, si nous prenons

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \left[ \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) \right] &, \text{ nous avons :} \\ \mathfrak{I} \left[ \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) \right] &= 0 \quad \text{si } M \text{ est paire} \\ \mathfrak{I} \left[ \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) \right] &= 1 \quad \text{si } M \text{ est impaire} \end{aligned}$$

Or, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) &= 1 \quad \text{si } M \text{ est paire} \\ \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) &= 0 \quad \text{si } M \text{ est impaire} \end{aligned}$$

Ce qui correspond au complément de l'Impulsion Première de  $\cos^2(\pi.M/2)$  pour  $M \in \mathbb{N}$ . En effet, pour les nombres entiers, la formule  $\cos^2(\pi.M/2)$  ne peut donner pour valeur que 0 ou 1, ce qui correspond au cas des formules "binaires" (voir formule d'Impulsion Première d'une variable binaire dans le **Chapitre 1** : l'Impulsion Première d'une variable binaire est équivalente au complément de cette variable). Nous avons donc :

$$\mathfrak{I} \left[ \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) \right] = 1 - \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) = \sin^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right)$$

Même raisonnement pour ce qui suit :

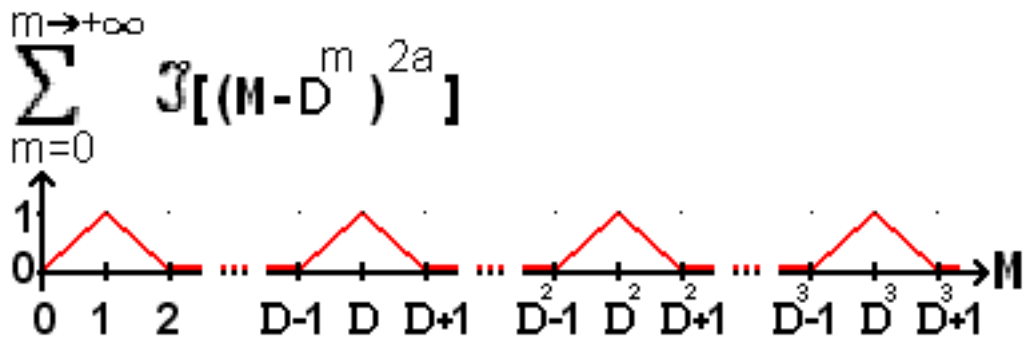
$$\mathfrak{J} \left[ \sin^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) \right] = 1 - \sin^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) = \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right)$$

Et donc, comme précédemment (mais de manière moins pertinente), ceci permet d'avoir un moyen supplémentaire d'obtenir une droite (par exemple). Nous avons :

$$\mathfrak{J} \left[ \sin^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) \right] + \mathfrak{J} \left[ \cos^2 \left( \pi \cdot \frac{M}{2} \right) \right] = 1$$

- Donnons encore quelques autres exemples de formules constructibles avec ceci :

Pour  $D \in \mathbb{N}$ ,  $D \geq 1$  :

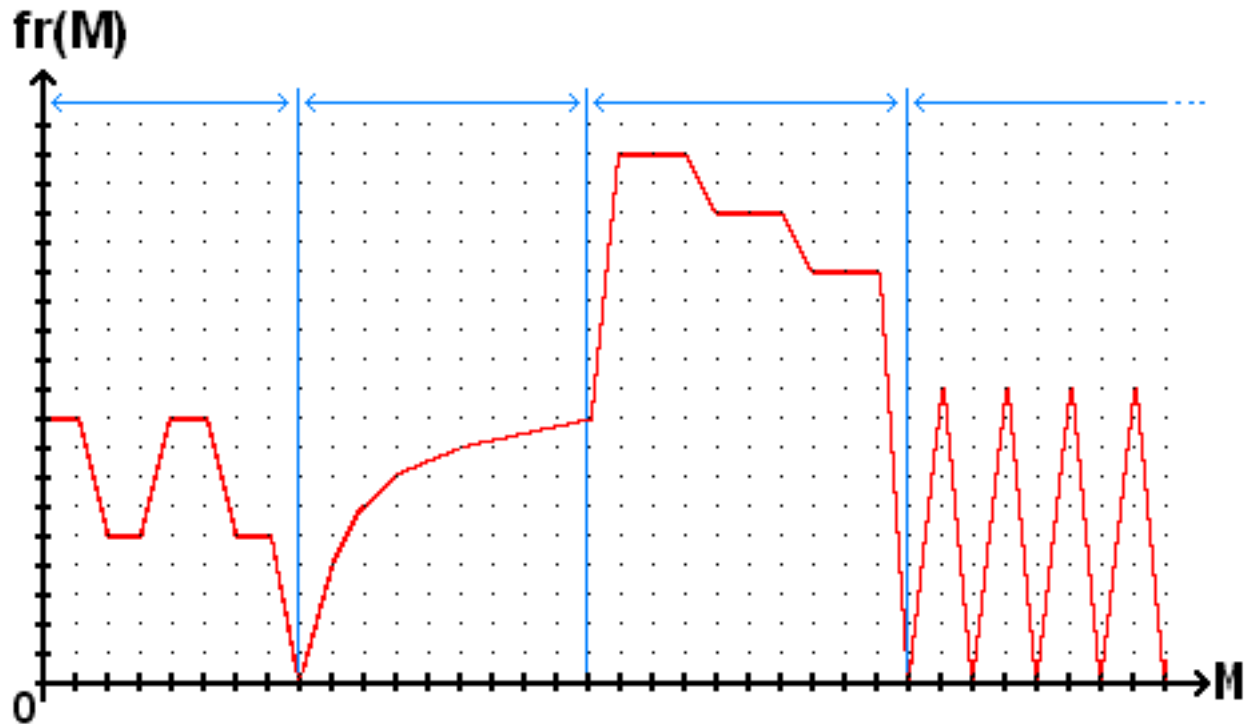


Où la formule obtenue ne vaut 1 que pour les puissances du nombre  $D$ , et 0 sinon. Ceci permet de représenter un phénomène de “période logarithmique”.

- D'autres exemples peuvent être donnés avec une formule qui serait un mixage d'autres formules. L'Impulsion Première d'une formule pouvant être égale à 1 pour certaines valeurs entières positives et 0 pour toutes les autres valeurs entières positives, il devient possible de “configurer” [ **une formule résultante** ] comme une somme [ **d'Impulsions Premières valant 1 sur des intervalles de valeurs** ], chacune de ces Impulsions Premières étant à multiplier par [ **la formule désirée sur chaque intervalle** ].



Nous pourrions alors imaginer d'obtenir la formule résultante  $fr(M)$  correspondant au graphique suivant (pour plus de lisibilité, nous allons lier chaque point du graphique par des segments, ceux-ci ne représentant donc pas une continuité, puisque passer d'un nombre entier à un autre invoque nécessairement la discontinuité) :



Où chaque ligne verticale bleue sépare la formule résultante  $fr(M)$  en intervalles afin de faire apparaître des formules plus simples (en fonction de  $M$ ), chacune multipliées par une Impulsion Première (de variable  $M$ ) relativement simple. Ces Impulsions Premières pouvant être caractérisées par des intervalles se “chevauchant” ou pas (au choix), elles sont “configurables”.

Pour finir, il est possible d'imaginer que cette formule  $fr(M)$  contienne des intervalles complet avec  $fr(M) = 0$  ou même avec  $fr(M) = 1$  selon  $M$ .

Remarque :

Comme dans le **Chapitre 1** (dans la sous-partie “**3.7 Equivalence de formules**”), il est possible d’établir des équivalences de formules due à la propriété de la formule d’Impulsion Première. En effet, avec  $P(M)$  un polynôme entier (positif ou négatif) de variable  $M \in \mathbb{Z}$ , et  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] &= 1 && \text{si } P(M) = 0 \\ \mathfrak{I}[P(M)^{2a}] &= 0 && \text{si } P(M) > 0\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} &= P(M) && \text{si } P(M) = 0 \\ P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} &= 1 && \text{si } P(M) > 0\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1 &= P(M) - 1 && \text{si } P(M) = 0 \\ P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1 &= 0 && \text{si } P(M) > 0\end{aligned}$$

Ce qui permet d’écrire :

$$\frac{P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1}{P(M) - 1} = 1 \quad \text{si } P(M) = 0$$

$$\frac{P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1}{P(M) - 1} = 0 \quad \text{si } P(M) > 0$$

Or, comme nous avons déjà :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] &= 1 && \text{si } P(M) = 0 \\ \mathfrak{I}[P(M)^{2a}] &= 0 && \text{si } P(M) > 0\end{aligned}$$

Ce qui permet de faire le lien et de conclure que :

$$\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = \frac{P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1}{P(M) - 1}$$

## 1.3 Généralisation avec les polynômes

De manière générale, pour tout polynôme (positif ou négatif, et quelquesoit le degré de ce polynôme) à coefficient entiers  $P(M)$  (afin que pour tout  $M$ ,  $P(M)$  ne donne que des résultats sous forme de nombres entiers, et donc afin que  $P(M)$  soit un polynôme entier tel que défini dans la sous-partie précédente), dans le cadre de la recherche des racines entières de ce polynôme (par conséquent, ces racines sont entières), c'est-à-dire pour  $P(M) = 0$  et lorsque ces racines existent, on a pour  $M \in \mathbb{Z}$  et pour  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a \geq 1$  :

$$P(M) = 1 - \mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = 0$$

Soient  $M_1, M_2, \dots, M_j$  les racines de ce polynômes ( $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$ ), on a donc :

$$P(M_1) = P(M_2) = \dots = P(M_j) = 0$$

Donc

$$(M - M_1).(M - M_2). \dots .(M - M_j) = 0$$

D'où

$$P(M) = (M - M_1).(M - M_2). \dots .(M - M_j)$$

Nous avons également :

$$P(M_1) = P(M_2) = \dots = P(M_j) = 0$$

$$= 1 - \mathfrak{I}[P(M_1)] = 1 - \mathfrak{I}[P(M_2)] = \dots = 1 - \mathfrak{I}[P(M_j)] = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} P(M) &= 0 \\ &= 1 - \mathfrak{I}\{[(M - M_1).(M - M_2). \dots .(M - M_j)]^{2a}\} \\ &= \{1 - \mathfrak{I}[(M - M_1)^{2a}]\}.\{1 - \mathfrak{I}[(M - M_2)^{2a}]\}.\dots.\{1 - \mathfrak{I}[(M - M_j)^{2a}]\} \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
 P(M) &= 0 \\
 &= 1 - \mathfrak{J} \left[ \prod_{i=1}^{i=j} (M - M_i)^{2a} \right] \\
 &= \prod_{i=1}^{i=j} \{1 - \mathfrak{J}[(M - M_i)^{2a}]\}
 \end{aligned}$$

Pour tout polynôme (positif ou négatif) à coefficient entiers  $P(M)$  et pour  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 1$ , nous observons que :

Si  $P(M) = 0$  , on a  $\{1 - \mathfrak{J}[P(M)^{2a}]\} = 0$ , et la réciproque est vraie.  
Si  $P(M) \neq 0$  , on a  $\{1 - \mathfrak{J}[P(M)^{2a}]\} = 1$ , et la réciproque est vraie.

Ce qui permet d'établir un lien entre tous les polynômes (positifs ou négatifs) à coefficient entiers  $P(M)$  , à variable entière (quelquesoit le degré du polynôme), leur(s) racine(s) et la formule d'Impulsion Première  $\mathfrak{J}$ .

### **REMARQUE 1 :**

Pour  $P(M)$  un polynôme entier (positif ou négatif) de variable  $M \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a \geq 1$ , si  $P(M)$  n'a pas de racine entière, alors nous avons toujours :

$$\mathfrak{J}[P(M)^{2a}] = 0$$

### **REMARQUE 2 :**

Pour  $P1(M)$  un polynôme entier (positif ou négatif) de variable  $M \in \mathbb{Z}$ , et  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a \geq 1$ , nous pouvons retrouver  $P2(M)$  les polynômes entiers (positif ou négatif) qui n'ont pas de racine entière sous la forme suivante :

$$P2(M) = P1(M) + b.\mathfrak{J}[P1(M)^{2a}] \quad \text{avec } b \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

On pourrait aussi imaginer que  $b$  s'exprime en fonction de  $M$  ...

## 1.4 Fonctions intéressantes

Pour des valeurs de  $M$  appartenant à un intervalle (mais pas nécessairement), il est possible de construire des fonctions qui “rejètent” ces valeurs. Voici quelques exemples de fonctions avec  $M$ ,  $D$ ,  $D_1$  et  $D_2 \in \mathbb{N}$ , et avec  $a \in \mathbb{R}$ . Ces fonctions “font penser à” des filtres.

Exemple 1 :

Fonction Rejet  $F_1(M)$  définie pour  $M \in [0; D]$  :

$$F_1(M) = a - \frac{1}{\mathfrak{J} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_1(M) &= (a - 1) && \text{Pour } 0 \leq M \leq D. \\ F_1(M) &\rightarrow -\infty && \text{Pour } M > D. \end{aligned}$$

Ce qui fait penser à un filtre “passe-bas” sur la variable  $M$ .

Exemple 2 :

Fonction Rejet  $F_2(M)$  définie pour  $M \in [D; +\infty]$  :

$$F_1(M) = a - \frac{1}{1 - \mathfrak{J} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_2(M) &\rightarrow -\infty && \text{Pour } 0 \leq M \leq D. \\ F_2(M) &= (a - 1) && \text{Pour } M > D. \end{aligned}$$

Ce qui fait penser à un filtre “passe-haut” sur la variable  $M$ .

Exemple 3 :

Fonction Rejet  $F_3(M)$  définie pour  $M \in [D_1; D_2]$  :

$$F_3(M) = a - \frac{1}{\mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D_2} (M - k) \right] - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=(D_1-1)} (M - k) \right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_3(M) &= (a - 1) && \text{Pour } D_1 \leq M \leq D_2. \\ F_3(M) &\rightarrow -\infty && \text{Pour } M < D_1 \text{ et pour } M > D_2. \end{aligned}$$

Ce qui fait penser à un filtre “passe-bande” sur la variable  $M$ .

Exemple 4 :

Fonction Rejet  $F_4(M)$  définie pour  $M \in [D_1; D_2]$  et avec  $D_1 = D_2 = D$  :

$$F_4(M) = a - \frac{1}{\mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=(D-1)} (M - k) \right]}$$

Donc

$$F_4(M) = a - \frac{1}{\mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right] - \mathfrak{I} \left[ \prod_{k=0}^{k=(D-1)} (M - k) \right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_4(M) &= (a - 1) && \text{Pour } M = D. \\ F_4(M) &\rightarrow -\infty && \text{Pour } M \neq D. \end{aligned}$$

Ce qui fait penser à un filtre “rejection complémentaire” sur la variable  $M$  (la bande passante du filtre est une seule valeur de  $M$ ).

Exemple 5 :

Fonction Rejet  $F_5(M)$  définie pour  $M \in [D1; D2]$  et avec  $D_1 = D_2 = D$  :

$$F_5(M) = a - \frac{1}{1 + \Im \left[ \prod_{k=0}^{k=(D-1)} (M - k) \right] - \Im \left[ \prod_{k=0}^{k=D} (M - k) \right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_5(M) &\rightarrow -\infty && \text{Pour } M = D. \\ F_5(M) &= (a - 1) && \text{Pour } M \neq D. \end{aligned}$$

Ce qui fait penser à un filtre “rejection” sur la variable  $M$ .

Hypothèse :

Il doit être possible d’établir des liens avec la théorie du signal ou même avec l’analyse harmonique si l’on considère que la variable  $M$  est une longueur d’onde ou une période.

Remarque :

Comme dans le **Chapitre 1**, même remarque concernant l’association de la variable  $M$  à une variable physique. En associant  $M$  à une longueur d’onde, nous devons admettre l’existence d’une limite minimum pour une longueur d’onde, et donc une limite minimum pour une période, et une limite maximum pour une fréquence. Le raisonnement reste le même en associant  $M$  à une période puisqu’il faut dans ce cas admettre une limite minimum pour la période, les conclusions sont donc identiques, mais le fait d’associer  $M$  à la période permet de généraliser l’application des formules à tous les phénomènes cycliques.





## 2

# Reconstitution par “quantification”

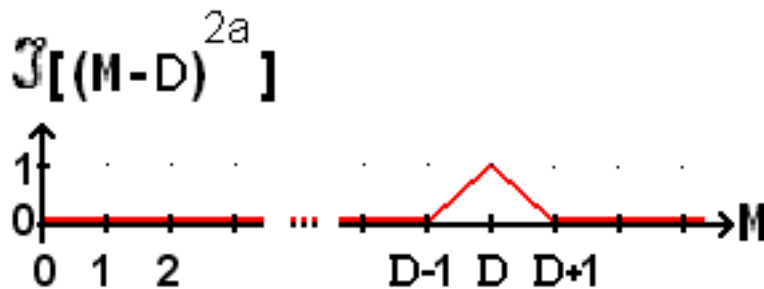
- Nous avons étudié le polynôme entier positif  $P(M) = (M - D)^{2a}$  avec  $D \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $a \geq 1$ . Nous avons vu que comme ce polynôme est toujours positif pour  $M \in \mathbb{Z}$ , la formule d'Impulsion Première de ce polynôme est définie pour tout  $M \in \mathbb{Z}$ . Nous avons noté :

$$\mathfrak{I}[P(M)] = \mathfrak{I}[(M - D)^{2a}]$$

Ce polynôme s'annule seulement si  $M = D$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] &= 1 && \text{si } M = D \\ \mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

La représentation graphique de cette formule étant la suivante :



- La suite va être donnée simplement par des définitions :

Appelons “quantification” le fait que pour  $\mathfrak{I}[P(M)]$  (donnée précédemment), nous devons avoir  $M \in \mathbb{Z}$ . Le mot “quantification” est empreinté à la physique quantique (les quantas, valeurs entières indivisibles, ou encore quantités discontinues).

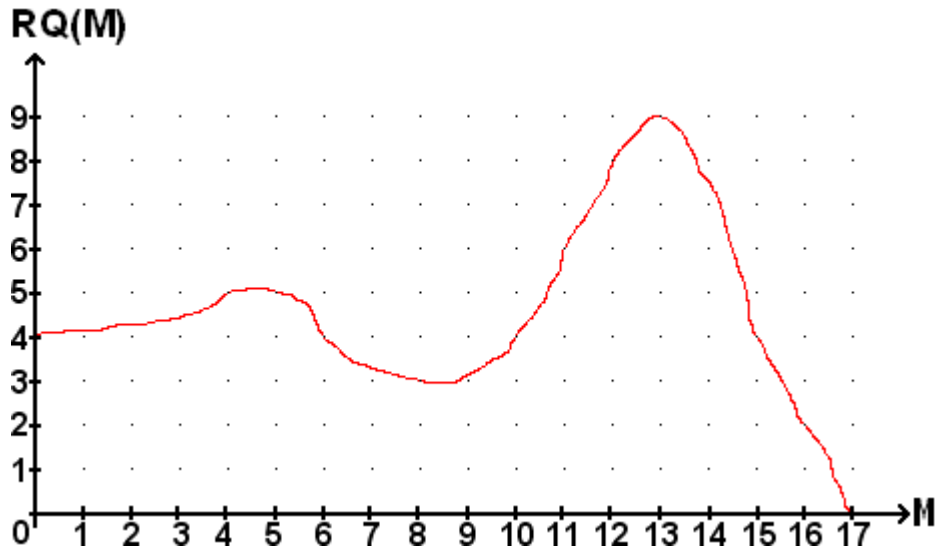
Appelons méthode de “reconstitution par quantification” la méthode d’ajout d’autant de formules d’Impulsion Première (telles que  $\mathfrak{I}[P(M)]$ ) que nécessaire pour donner une approximation de toutes fonctions ou formules connues, où la valeur de  $D$  est ajustable pour chacune de ces formules d’Impulsion Première. La méthode s’appliquant également à des formules non connues mais recherchée. Notons  $RQ(M)$  la formule d’approximation obtenue.

Le désavantage est la marge d’erreur due à l’approximation.

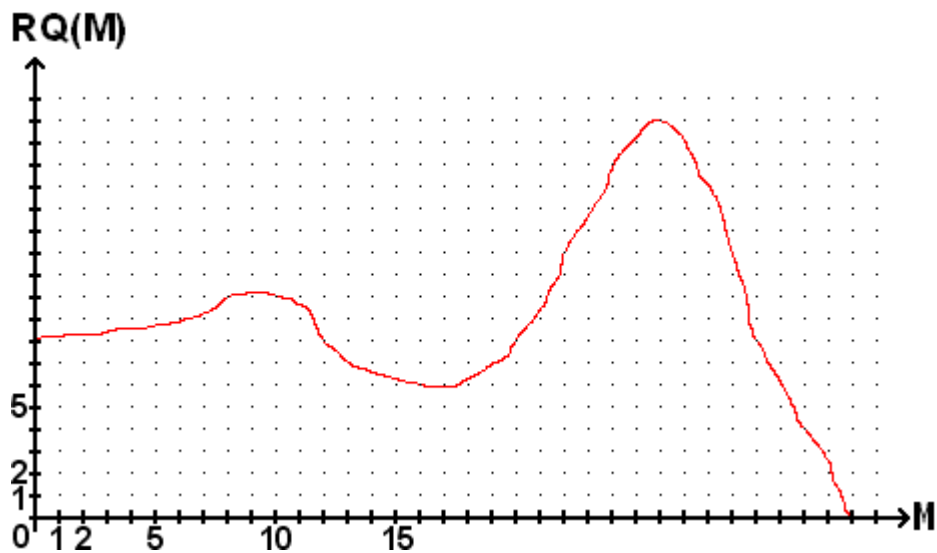
L’avantage de cette méthode qu’elle permet de donner une approximation de tout ce que l’on cherche à obtenir. Par exemple, en traçant une courbe à main levée et au hasard sur un graphique, il est possible de donner une approximation par cette méthode. Il est même possible de choisir l’échelle pour  $M$  et pour  $\mathfrak{I}[P(M)]$  (afin de diminuer ou augmenter la marge d’erreur).

Pour cela, il suffit de tracer une courbe dans un plan sans repères de coordonnée ni d’abscisse. Une fois cette courbe tracée, il nous suffit de décider quel marge d’erreur est acceptable pour l’approximation (en ajoutant les repères de coordonnée et d’abscisse).

Par exemple donnons le tracé d'une courbe telle que :



La marge d'erreur de l'approximation peut être réduite en changeant la “résolution” du graphique, c'est-à-dire en effectuant un changement de repère (dans notre cas en ramenant l'unité de graphique précédent à une mesure 2 fois plus petite pour le graphique suivant), de manière à obtenir :



Nous pouvons procéder ainsi de suite en augmentant à l'infini la “résolution” graphique, de manière à ce que la reconstitution de cette courbe tende à devenir exacte.

Le terme de résolution (comme pour la résolution d'une image numérique) est ici employé car l'ensemble de coordonnées  $\{M; RQ(M)\}$  est utilisée comme un "pixel" (terme informatique) qui serait déposé sur un point de la courbe, et de proche en proche sur tous les points de la courbe (dans le cas d'une résolution qui tendrait vers une précision exacte, et donc une marge d'erreur qui tendrait vers 0).

Remarquons qu'il est aussi possible de rajouter un coefficient multiplicateur devant chacune de ces formules d'Impulsion Première de  $RQ(M)$  de manière à donner une valeur exacte de la courbe en  $M$ . Ceci nous permettrait de n'avoir à changer la résolution que de l'axe  $M$  sans changer celui de  $RQ(M)$ . D'ailleurs dans ce cas, et pour atteindre la bonne valeur de la courbe, il n'est pas utile de faire la somme de plusieurs formules d'Impulsions Premières en une valeur de  $M$  donnée : il suffit d'une seule formule d'Impulsion Première multipliée par le coefficient qui permet d'atteindre directement la valeur de la courbe. En faisant de même pour chaque valeur de  $M$ , nous reconstituons la courbe point par point de manière approximative.

Remarque importante :

Cette méthode de reconstitution par quantification fait penser aux fonctions en escalier utiles pour les intégrales. Il doit donc être possible d'établir un lien entre les fonctions intégrales et la formule  $\mathfrak{I}[P(M)]$  telle que nous l'avons définie.

---

---

Chapitre 3 sur 6 :

**Répartition exacte  
des Nombres Premiers**

---

---

(Voir chapitre correspondant pour la suite)